

Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ
Функциональные ряды. Занятие 8

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 8

группа 201,
Сычугов Д.Ю.

стр. 0

Домашнее задание к предыдущему семинару:

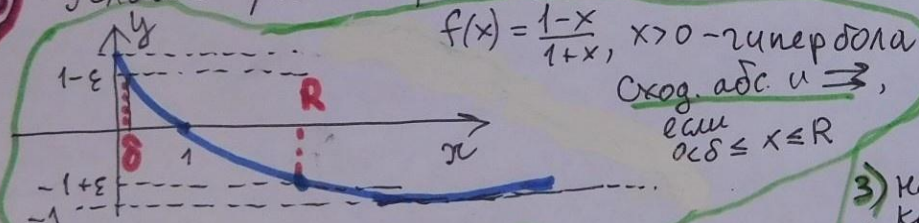
2717

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

- 1) $x=0 \Rightarrow (1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ - сходится (условно) по признаку Лейбница;
- 2) Условие поточечной (абсолютной) сходимости: $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 < (1+x)^2 \Leftrightarrow x > 0$$

- 3) условие равномерной (абсолютной) сходимости $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ малое число.



Ответ: 1) $x=0$ - сход. условно;
2) $0 < x < \infty$ - сход. поточечно, абс.

- 3) на $\forall$ отрезке $0 \leq \delta \leq x \leq R$ сход. $\Rightarrow$
конечной длины и абсолютно;
4) $x < 0$ - расходится

2751

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) $0 \leq x \leq 1-\varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{(1-\varepsilon)^n}{1} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$;

b) $1-\varepsilon \leq x \leq 1+\varepsilon$ при $x < 1$ $f_n(x) \rightarrow 0$
при $x > 1$ $f_n(x) \rightarrow 1$
при $x = 1$ $f_n(1) = 1/2$

$\Rightarrow$ почему? Например, при $1-\varepsilon \leq x < 1$
 $\zeta_n(x) = |f_n(x) - 0| = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{4} \neq 0$ (при $x = x_n$)
 $\Rightarrow 3x_n^n = 1 \Rightarrow x_n = \sqrt[n]{1/3} \in (1-\varepsilon; 1)$ при дост. больших n .
b) $1+\varepsilon \leq x < \infty$ $f_n(x) \rightarrow 1$, почему? $\zeta_n(x) = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+(1+\varepsilon)^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 8

стр. 1

Теория: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X$ (2)

Теорема 1 (признак Вейерштрасса) Если $\exists$ сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (3), такой, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ верно $|u_n(x)| \leq a_n$, то ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на X .

2774, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, -\infty < x < \infty$ $|u_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ — член
сход. ряда $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \rightarrow$ на $(-\infty; \infty)$

2774, г $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, -\infty < x < \infty; u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$
 $\max_{x \in (-\infty; \infty)} |u_n(x)| = \max_{0 \leq x < \infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}; u_n'(x) = \frac{n(1+n^5x^2) - nx \cdot 2n^5x}{(1+n^5x^2)^2} = \frac{n - n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_n = \frac{1}{n^{5/2}} \Rightarrow u_n(x_n) = \frac{n \cdot n^{-5/2}}{1+1} = \frac{1}{2n^{-3/2}} = a_n$ — член сход. ряда
 $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \rightarrow$ абс. на $(-\infty; \infty)$

2786

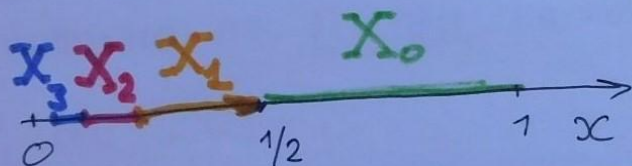
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ где } u_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)} \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & 2^{-(n+1)} \leq x \leq 2^{-n} \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

стр. 2

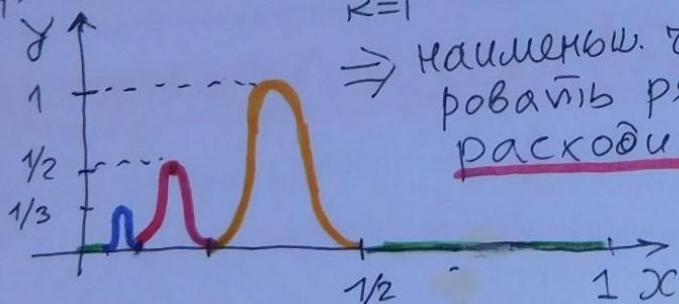
(4)

Доказать, что ряд (4) сход. абсолютно и равномерно на $X=[0;1]$, и в то же время его нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотр. членами.

Док-во 1) Обозначим $X_n = [2^{-(n+1)}; 2^{-n}]$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = (0;1]$, причем все X_n имеют общими только граничные точки, (см. рис)



2) Аргумент $2^{n+1} \pi x$ меняется на X_n от π до $2\pi \Rightarrow \sin^2(2^{n+1} \pi x)$ пробегает на X_n все значения от 0 до 1 $\Rightarrow$ Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ будет выглядеть так:



$\Rightarrow$ наименьш. числовой ряд, которым можно мажорировать ряд (4), является гарм. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а он расходится

Вывод: Признак Вейерштрасса критерием не является!

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 8

стр. 3

Теория:

Рассматривается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x), x \in X$ (5)

Теорема 2 (признак Дирихле) Если: 1) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^n a_k(x)$ в совокупности ограничены т.е. $\exists A > 0$:
для $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| < A$; 2) $\{b_n(x)\}$ равномерно на X и монотонно по n при каждом $x \in X \rightarrow 0$, то ряд (5) $\Rightarrow$ на X .

2777

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

$a_n(x) = a_n = (-1)^n; b_n(x) = \frac{1}{x+n} \Rightarrow$ признак Дирихле,
 $(\{b_n(x)\} \rightarrow 0, |b_n(x)| \leq \frac{1}{n}) \Rightarrow \Rightarrow$ на $(0; \infty)$.

Теорема 3 (признак Абеля) Если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow$ на X ;
2) функции $b_n(x)$ огр. в совокупности и при каждом $x \in X$ образуют мон. последовательность, то ряд (5) $\Rightarrow$ на X .

2775 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (6), $a_n(x) = \sin nx$, $\{b_n\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. стр. 4

а) Пусть $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ Обозначим $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$. Т.к. $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$,

то $\sin \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow 2A_n(x) \cdot \sin \frac{x}{2} = 2 \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots$

$\dots 2 \sin nx \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots + \cos \left(nx - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(nx + \frac{x}{2} \right)$

$\Rightarrow A_n(x) = \frac{\cos \left(\frac{x}{2} \right) - \cos \left(nx + \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

$\Rightarrow$ на мн-ве $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ верно $|A_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow$ ср. в совокупности $\Rightarrow$ признак Дирихле, $\Rightarrow$.

б) Пусть $0 \leq x \leq 2\pi$. Выберем для фикс. $n \in \mathbb{N}$ $x = \frac{\pi}{6n}$, тогда для всех $n \leq k \leq 2n$ верно $\frac{\pi}{6} \leq kx \leq \frac{\pi}{3}$ и $\sin kx \geq \frac{1}{2}$.

Получим $\left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \right| > \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n} \sin kx \geq \frac{1}{2} n \cdot \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \rightarrow 0$ Критерий Коши не выполняется

Докажем, что абсолютной сходимости нет ни в первом, ни во втором случае. В самом деле

$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{n}$

← член расход. ряда

← член сход. ряда

СЕМЕСТР 1, СЕМНАНН 8

стр. 5

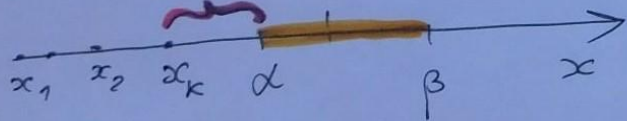
2781 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin x}{\sqrt{n+x}}$; $a_n(x) = \sin x \cdot \sin nx$; $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$

$A_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = \sin x \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin x \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{n}{2}x \cdot \sin \frac{n+1}{2}x \Rightarrow$
 $\Rightarrow |A_n(x)| \leq 2$ для $\forall n, x$; $b_n(x) \rightarrow 0$, $b_n(x) \Rightarrow 0 \Rightarrow$ призн. Дирихле $\Rightarrow \Rightarrow$
выполнен

2788 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ - сход. Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ сход. ас. и

равномерно на $\forall$ замкн. мн-ве, не содержа. точек a_n

Док-во Пусть $x \in [\alpha, \beta]$, причем $[\alpha, \beta]$ не содержит ни одной
 посл. $\{a_n\} \Rightarrow \min_{x \in [\alpha, \beta]} |x - a_n| = \delta > 0$,
 и min достигается на $n \in \mathbb{N}$ на точке x_k .



поэтому $\left| \frac{1}{x-a_n} \right| = \left| \frac{1}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_n}{x-a_n} \right| = \frac{1}{|a_n|} \left| \frac{1}{\frac{x}{a_n} - 1} \right| \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \max_{1 \leq m \leq n} \left| \frac{1}{\frac{x}{a_m} - 1} \right| =$
 $= \frac{1}{|a_n|} \cdot \left| \frac{1}{\frac{\alpha}{x_k} - 1} \right| = \frac{1}{|a_n|} \cdot \left| \frac{1}{\frac{x_k + \delta}{x_k} - 1} \right| = \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 + \frac{\delta}{a_k} - 1 \right|} = \left| \frac{\delta}{a_k} \right| \cdot \frac{1}{|a_n|}$
 Прогие случаи рассм. аналогично.
 $\Rightarrow$ от. величина

На дом: 2774 в), 2778, 2789, 2782, 2791, 2780